Vorlesung “Modellierung” Wintersemester 2014/15

Petri-Netze (Folien teilw. von Prof. B. König)

Prof. Norbert Fuhr

Motivation: Petrinetze

Petrinetze sind ein Formalismus zur Modellierung von nebenläufigen Systemen mit folgenden Eigenschaften:

- Vorstellung von Systemübergängen, bei denen gemeinsame Ressourcen konsumiert und neu erzeugt werden können.
- Einfache Modellierung von räumlicher Verteilung der Ressourcen, Nebenläufigkeit, Parallelität und (Zugriffs-)Konflikten.
- Intuitive graphische Darstellung.
- Petrinetze werden in der Praxis vielfach benutzt. In UML sind sie abgewandelt als sogenannte Aktivitätsdiagramme (engl. activity diagrams) eingegangen.
- Eingeführt wurden Sie in der Doktorarbeit von Carl Adam Petri: "Kommunikation mit Automaten"', Bonn, 1962.

Motivation: Petrinetze

Parallelität versus Nebenläufigkeit:

Parallelität

Zwei Ereignisse finden parallel statt, wenn sie gleichzeitig ausgeführt werden.

Nebenläufigkeit

Zwei Ereignisse sind nebenläufig, wenn sie parallel ausgeführt werden können (jedoch nicht müssen), das heißt, wenn zwischen ihnen keine kausale Abhängigkeit besteht.

Das bedeutet: Nebenläufigkeit ist der allgemeinere Begriff.

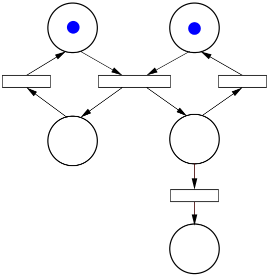
Motivation: Petrinetze

Anwendungen für Petrinetze:

- Modellierung von Büroabläufen (work flow, business processes)
- Modellierung und Analyse von Web Services
- Beschreibung von graphischen Benutzeroberflächen
- Prozessmodellierung bei Betriebssystemen
- Ablaufbeschreibungen in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen
- ...

Motivation: Petrinetze

Beispiel für ein Petrinetz:

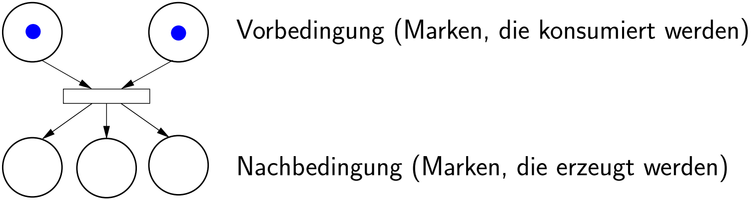


Notation:

- Stellen (dargestellt als Kreise): Mögliche Plätze für Ressourcen
- Marken (dargestellt als kleine ausgefüllte Kreise): Ressourcen
- Transitionen (dargestellt durch Rechtecke): Systemübergänge

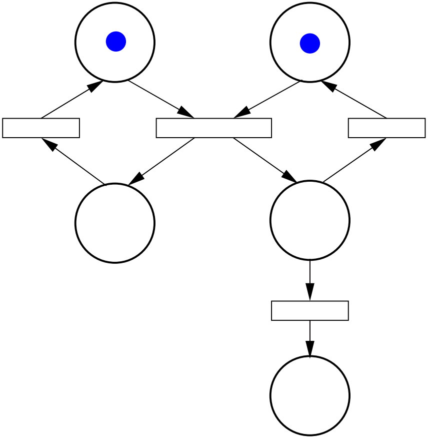
Motivation: Petrinetze

Darstellung einer Transition:

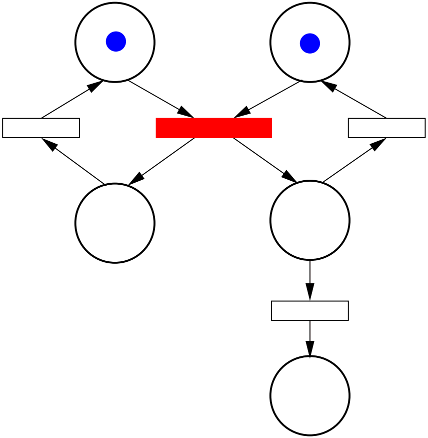


Die Entfernung der Marken der Vorbedingung und Erzeugung der Marken der Nachbedingung nennt man Schalten bzw. Feuern der Transition.

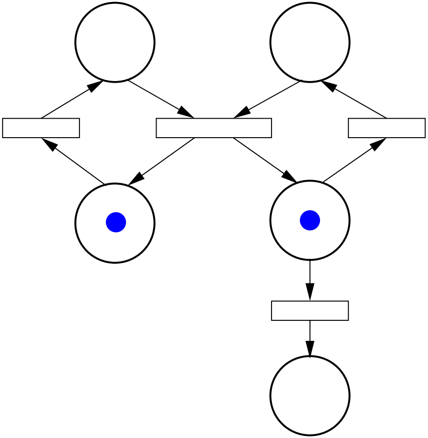
Motivation: Petrinetze



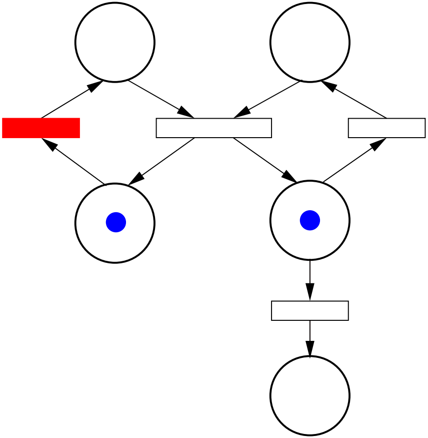
Motivation: Petrinetze



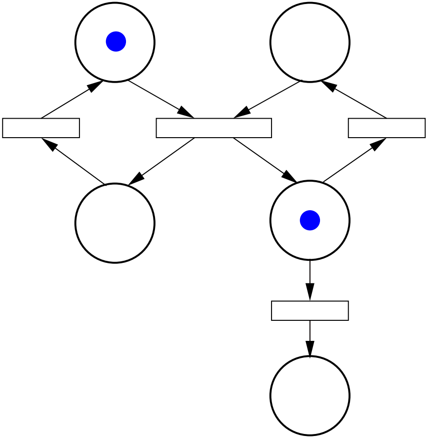
Motivation: Petrinetze



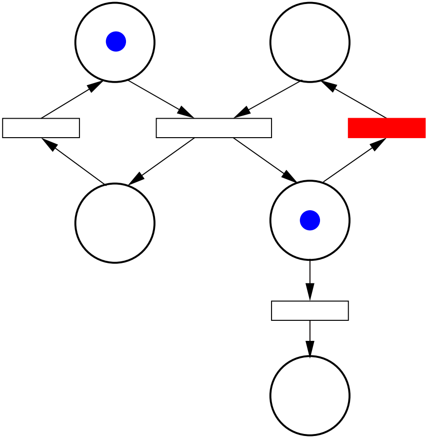
Motivation: Petrinetze



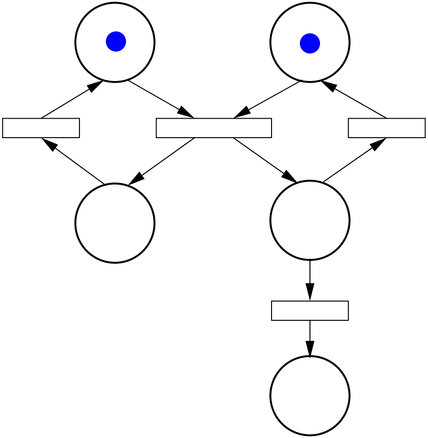
Motivation: Petrinetze



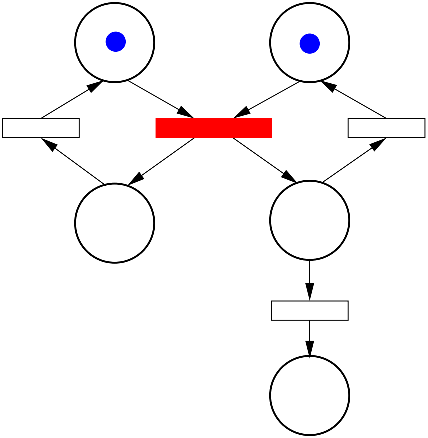
Motivation: Petrinetze



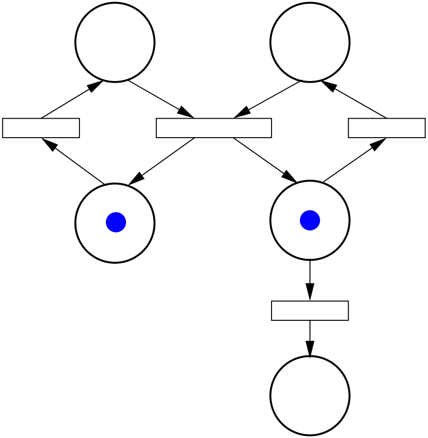
Motivation: Petrinetze



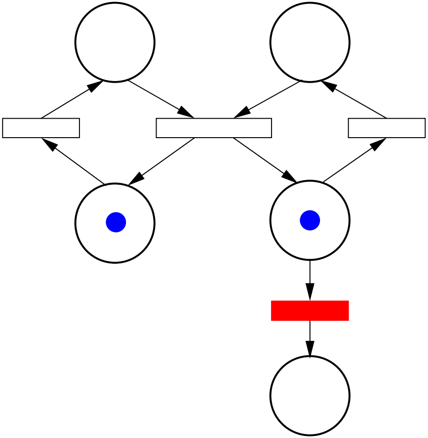
Motivation: Petrinetze



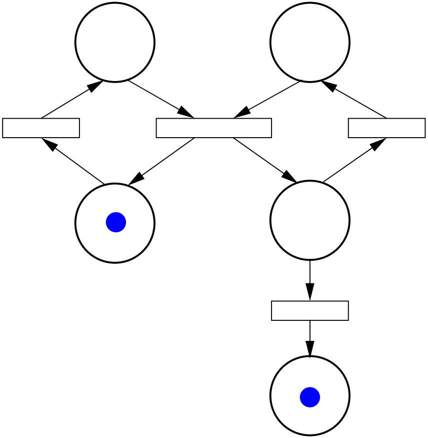
Motivation: Petrinetze



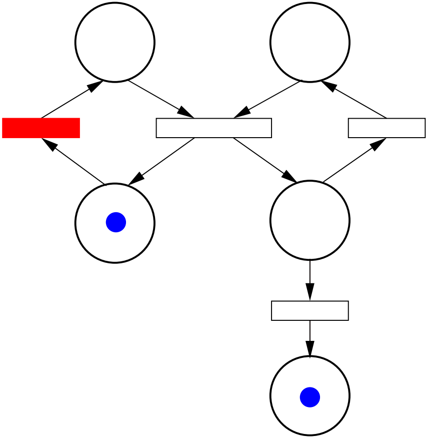
Motivation: Petrinetze



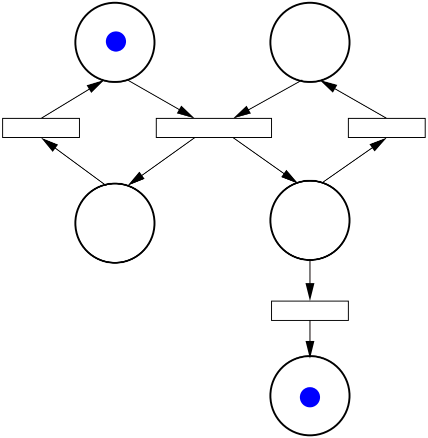
Motivation: Petrinetze



Motivation: Petrinetze



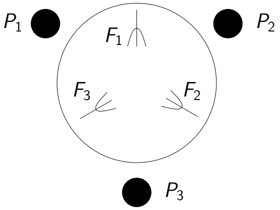
Motivation: Petrinetze



Beispiel: Dining Philosophers

Wir betrachten das Beispiel der Dining Philosophers (speisende Philosophen):

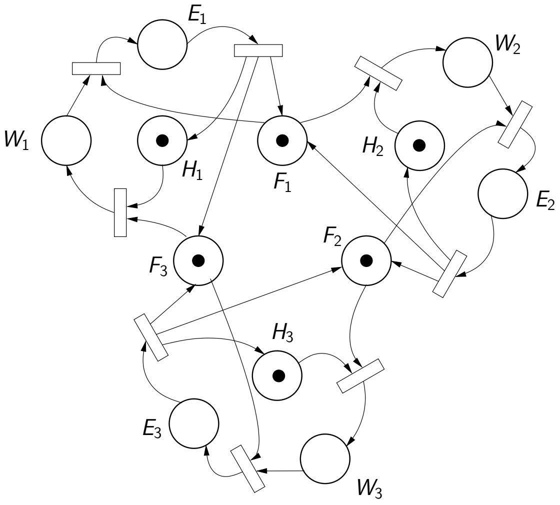
- Es sitzen drei Philosophen um einen runden Tisch, zwischen je zwei Philosophen liegt eine Gabel.
- Philosophen werden von Zeit zu Zeit hungrig und benötigen zum Essen beide benachbarte Gabeln.
- Jeder Philosoph nimmt zu einem beliebigen Zeitpunkt beide Gabeln nacheinander auf (die rechte zuerst), isst und legt anschließend beide Gabeln wieder zurück.



Beispiel: Dining Philosophers

Modellierung als Petrinetz:

In dem Netz ist ein Deadlock (Verklemmung) erreichbar, d.h., eine Markierung, bei der keine Transition mehr geschaltet werden kann.



Petrinetze: Definitionen

Petrinetz (Definition)

Ein Petrinetz ist ein Tupel $N = (S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0)$, wobei

- S eine Menge von Stellen und
- T eine Menge von Transitionen ist.
- Außerdem gibt es für jede Transition t zwei Funktionen ${}^\bullet t \colon S \to \mathbb{N}_0$, $t^\bullet \colon S \to \mathbb{N}_0$, die angeben, wieviele Marken t aus einer Stelle entnimmt und in eine Stelle legt.
- $m_0 \colon S \to \mathbb{N}_0$ ist die Anfangsmarkierung (oder initiale Markierung).

Der Wert ${}^\bullet t(s)$ bzw. $t^\bullet(s)$ wird auch als Gewicht bezeichnet.

Petrinetze: Definitionen

Markierung

Eine Markierung ist eine Abbildung $m \colon S \to \mathbb{N}_0$, die festlegt, wieviele Marken in jeder Stelle liegen.
Falls eine Reihenfolge $s_1, \ldots, s_n$ der Stellen fixiert wurde, kann eine Markierung m auch durch ein Tupel $(m(s_1), \ldots, m(s_n))$ dargestellt werden.

Petrinetze: Darstellung

Eine andere Definition stellt die Verbindungen zwischen Stellen und Transitionen und die dazugehörigen Gewichte als Graph dar:

$$F \subseteq (S \cup T) \times (\mathbb{N}_0 \setminus \{0\}) \times (S \cup T) \qquad \text{(Flussrelation)},$$

wobei nur Kanten der Form (s, n, t) (von Stelle zu Transition) und (t, n, s) (von Transition zu Stelle) mit $s \in S, t \in T$ erlaubt sind.

Zusammenhang zur eingeführten Notation:

$$\begin{aligned}
(s, n, t) \in F &\iff {}^{\bullet}t(s) = n \neq 0 \\
(t, n, s) \in F &\iff t^{\bullet}(s) = n \neq 0
\end{aligned}$$

Manchmal werden auch unbeschriftete Kante eingeführt, denen dann mit Hilfe einer Funktion W ein Gewicht zugeordnet wird.

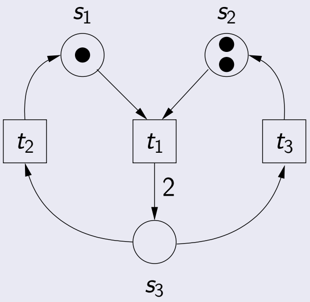
Petrinetze: Darstellung

Graphische Darstellung:

- Stellen werden als Kreise, Transitionen als Quadrate oder Rechtecke, Marken als kleine schwarze ausgefüllte Kreise dargestellt
- Kanten zwischen Stellen und Transitionen werden als Pfeile dargestellt.
- Das Gewicht als Kantenbeschriftung kann weggelassen werden, falls es den Wert eins hat. Die Kante wird ganz weggelassen, falls das Gewicht den Wert 0 hat.

Petrinetze: Darstellung

Wir betrachten den Zusammenhang zwischen der mathematischen Notation und der graphischen Darstellung genauer:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}$$
$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

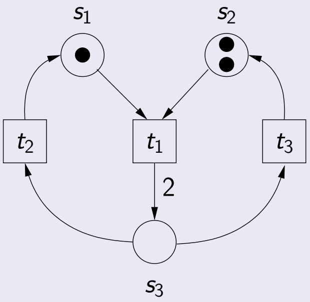
$$^\bullet t_1(s_1) = 1 \quad ^\bullet t_1(s_2) = 1 \quad ^\bullet t_1(s_3) = 0$$
$$t_1^\bullet(s_1) = 0 \quad t_1^\bullet(s_2) = 0 \quad t_1^\bullet(s_3) = 2$$
$$\textit{oder: } {}^\bullet t_1 = (1, 1, 0) \quad t_1^\bullet = (0, 0, 2)$$

$\ldots$

$$m_0(s_1) = 1 \quad m_0(s_2) = 2 \quad m_0(s_3) = 0$$
$$\textit{oder: } m_0 = (1, 2, 0)$$

Petrinetze: Darstellung

Wir betrachten den Zusammenhang zwischen der mathematischen Notation und der graphischen Darstellung genauer:



Stellenordnung: s_1, s_2, s_3

Alternative Darstellung (mit Flussrelation):

$$\begin{aligned}
S &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
F &= \{(s_1, 1, t_1), (s_2, 1, t_1), (t_1, 2, s_3), \\
&\qquad (s_3, 1, t_2), (t_2, 1, s_1), \\
&\qquad (s_3, 1, t_3), (t_3, 1, s_2)\} \\
m_0 &= (1, 2, 0)
\end{aligned}$$

Petrinetze: Dynamik

Operationen auf Markierungen:

Seien $m, m' \colon S \to \mathbb{N}_0$ zwei Abbildungen von Stellen auf natürliche Zahlen.

Ordnung

Es gilt $m \leq m'$, falls für alle $s \in S$ gilt: $m(s) \leq m'(s)$.

Addition

Wir definieren $m'' = m \oplus m'$, wobei $m'' \colon S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) + m'(s)$ für alle $s \in S$.

Subtraktion

Wir definieren $m'' = m \ominus m'$, wobei $m'' \colon S \to \mathbb{N}_0$ mit $m''(s) = m(s) - m'(s)$ für alle $s \in S$. Dabei gilt $n - k = 0$, falls $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n < k$ (modifizierte Subtraktion).

Petrinetze: Dynamik

Weitere Definitionen:

Aktivierung

Eine Transition t ist unter einer Markierung m aktiviert, falls $^\bullet t \leq m$ gilt. (D.h., falls genug Marken vorhanden sind, um die Transition zu schalten.)

Schalten

Sei m eine Markierung und t eine Transition, die für m aktiviert ist. Dann kann t schalten, was zu der Nachfolgemarkierung $m' = m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet$ führt. Symbolisch $m[t\rangle m'$.

Petrinetze: Dynamik

Weitere Definitionen:

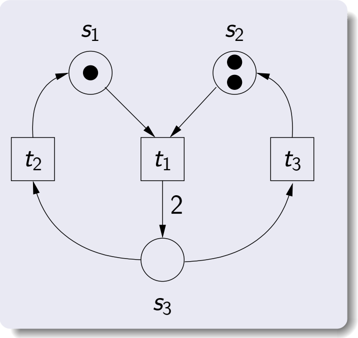
Erreichbarkeit

Eine Markierung m heißt erreichbar in einem Netz, falls es eine Folge von Transitionen $t_1, \dots, t_n$ gibt mit $m_0[t_1\rangle m_1 \dots m_{n-1}[t_n\rangle m$, wobei m_0 die Anfangsmarkierung ist.

In diesem Fall schreibt man auch $m_0[t_1 \dots t_n\rangle m$ oder $m_0[\tilde{t}\rangle m$ mit $\tilde{t} = t_1 \dots t_n$.

Die Sequenz $\tilde{t}$ heißt auch Schaltfolge. Auch die leere Schaltfolge $\tilde{t} = \varepsilon$ is möglich. In diesem Fall ändert sich die Markierung nicht ($m[\varepsilon\rangle m$, für jede Markierung m).

Petrinetze: Dynamik



Die Markierung $m_2 = (1,1,1)$ ist in zwei Schritten erreichbar:

- ${}^\bullet t_1 = (1,1,0) \leq (1,2,0) = m_0$

  $m_1 = m_0 \ominus {}^\bullet t_1 \oplus t_1{}^\bullet = (1,2,0) \ominus (1,1,0) \oplus (0,0,2) = (0,1,2)$

- ${}^\bullet t_2 = (0,0,1) \leq (0,1,2) = m_1$

  $m_2 = m_1 \ominus {}^\bullet t_2 \oplus t_2{}^\bullet = (0,1,2) \ominus (0,0,1) \oplus (1,0,0) = (1,1,1)$

Es gilt also: $m_0[t_1\rangle m_1[t_2\rangle m_2$

Petrinetze: Dynamik

Zustandsübergangsdiagramm eines Petrinetzes

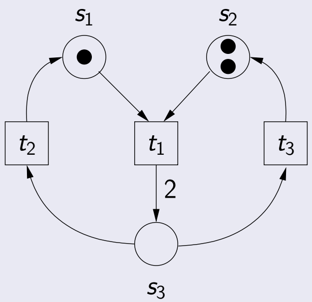
Sei $N = (S, T, {}^\bullet(), ()^\bullet, m_0)$ ein Petrinetz. Dann besteht das zu N gehörende Zustandsübergangsdiagramm aus folgenden Komponenten:

- Menge der Beschriftungen L: Menge aller Transitionen
- Zustandsmenge Z: Menge aller erreichbaren Markierungen
- Übergangsmenge U: $(m, t, m') \in U \iff m[t\rangle m'$.
- Startzustand z_0: die Anfangsmarkierung m_0

Das Zustandsübergangsdiagramm eines Petrinetzes heißt auch Erreichbarkeitsgraph.

Petrinetze: Dynamik

Beispiel: Bestimme den Erreichbarkeitsgraph für das folgende Beispielnetz



Petrinetze: Dynamik

Erreichbarkeitsgraph für das Beispielnetz:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & & & & \\
(1,2,0) \arrow[d, "t_1"] & & & & \\
(0,1,2) \arrow[r, "t_3"] \arrow[dr, "t_2"] & (0,2,1) \arrow[r, "t_3"] \arrow[ul, bend right, "t_2"'] & (0,3,0) & & \\
& (1,1,1) \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "t_1"'] \arrow[uul, bend left=60, "t_3"] & (2,1,0) \arrow[d, "t_1"] & & \\
& (0,0,3) \arrow[r, "t_2"'] \arrow[uul, bend left=40, "t_3"] & (1,0,2) \arrow[r, "t_2"'] \arrow[ul, "t_3"'] & (2,0,1) \arrow[r, "t_2"'] \arrow[ul, bend right, "t_3"'] & (3,0,0)
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Dynamik

Frage: Wie kann ein beliebiges Zustandsübergangsdiagramm in ein Petrinetz umgewandelt werden, das als Erreichbarkeitsgraph wieder das ursprüngliche Zustandsübergangsdiagramm besitzt?

Idee:

- Zustände werden zu Stellen
- Übergänge werden zu Transitionen
- die Stelle, die den Anfangszustand darstellt, ist als einzige zu Beginn markiert

Aber:

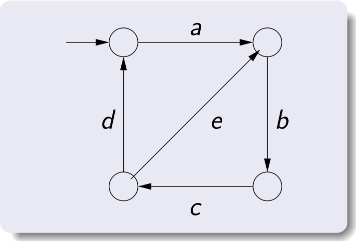
- das entstandene Petrinetz enthält keinerlei Nebenläufigkeit
- bei der Umwandlung

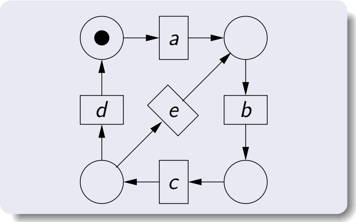
  Petrinetz → *Zustandsübergangsdiagramm* → *Petrinetz*

  wird das zweite Petrinetz im allgemeinen viel größer als das erste

Petrinetze: Dynamik

Beispiel: Umwandlung eines Zustandsübergangsdiagramms in ein Petrinetz





Petrinetze: Beschränktheit

Sichere, beschränkte und unbeschränkte Netze

Sei N ein Petrinetz. Das Netz N heißt

- beschränkt, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für jede erreichbare Markierung m und jede Stelle s gilt, dass $m(s) \leq c$.
- sicher (oder auch 1-sicher), wenn
  - Für jede Transition t und für jede Stelle s gilt ${}^\bullet t(s) \leq 1$ und $t^\bullet(s) \leq 1$, d.h., alle Gewichte sind höchstens 1 *und*
  - für jede erreichbare Markierung m und jede Stelle s gilt, dass $m(s) \leq 1$.
- unbeschränkt, falls es für jede Konstante $c \in \mathbb{N}_0$ eine erreichbare Markierung m und eine Stelle s gibt mit $m(s) > c$.

Aufgabe: Finde ein Beispiel für ein unbeschränktes Netz.

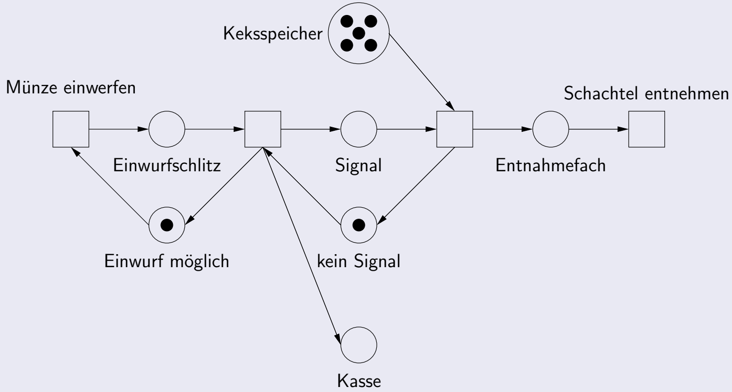
Petrinetz-Beispiel: Keksautomat

Wir modellieren einen Keksautomaten mit folgenden Bestandteilen:

- extern: Einwurfschlitz, Entnahmefach
- intern: Keksspeicher, Kasse, Signalweiterleitung (der Einwurf einer Münze soll ein Signal erzeugen, das die Ausgabe eines Kekses triggert)

Nach: "Petrinetze – Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien" von W. Reisig

Petrinetz-Beispiel: Keksautomat



Petrinetz-Beispiel: Keksautomat

Ist der Keksautomat so in Ordnung?

Problem: Sobald der Keksspeicher leer ist, kann immer noch eine Münze eingeworfen werden, die dann nicht zurückgegeben wird.

Es gibt verschiedene Lösungen für dieses Problem: Rückgabe der Münze, Keks-Zähler, ...

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Wir betrachten nun Begriffe wie Lebendigkeit und Deadlock (= Verklemmung).

(Starke) Lebendigkeit

Ein Petrinetz N heißt (stark) lebendig, wenn es für jede Transition t und für jede erreichbare Markierung m eine Markierung m' gibt, die von m erreichbar ist und unter der t aktiviert ist.

Für den Erreichbarkeitsgraph bedeutet dies: von jedem Knoten des Graphen aus ist ein Übergang erreichbar, der mit der Transition t beschriftet ist.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Schwache Lebendigkeit

Ein Petrinetz N heißt schwach lebendig, wenn es für jede Transition t eine erreichbare Markierung m gibt, unter der t aktiviert ist.

Für den Erreichbarkeitsgraph bedeutet dies: für jede Transition gibt es mindestens einen Übergang, der mit der Transition t beschriftet ist.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Verklemmung

Ein Petrinetz N enthält ein Deadlock oder eine Verklemmung, wenn es eine erreichbare Markierung m gibt, unter der keine Transition aktiviert ist.

Für den Erreichbarkeitsgraph bedeutet dies: es gibt einen Knoten, von dem aus es keinen Übergang gibt.

Ein Netz, das keine Verklemmung enthält, heißt verklemmungsfrei.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

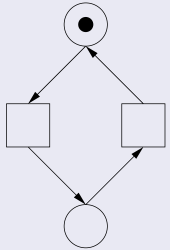
Eigenschaften der (starken) Lebendigkeit

Für Netze, deren Transitionsmenge nicht leer ist, gilt: jedes (stark) lebendige Netz ist sowohl verklemmungsfrei, als auch schwach lebendig.

Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

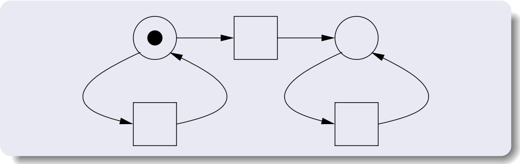
Beispiele für Lebendigkeit und Verklemmungen:

Ein Beispiel für ein (stark) lebendiges Netz ...



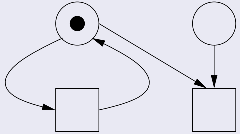
Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Ein Beispiel für ein schwach lebendiges und verklemmungsfreies Netz, das jedoch nicht (stark) lebendig ist . . .



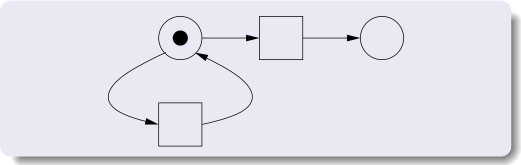
Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Ein Beispiel für ein verklemmungsfreies Netz, das jedoch nicht schwach lebendig ist . . .



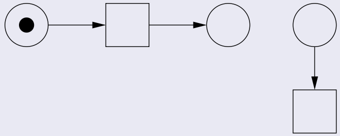
Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Ein Beispiel für ein schwach lebendiges Netz, das jedoch eine Verklemmung enthält ...



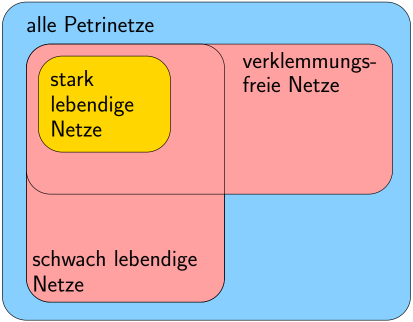
Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Ein Beispiel für ein Netz, das eine Verklemmung enthält und das auch nicht schwach lebendig ist ...



Petrinetze: Lebendigkeit und Verklemmungen

Überblick über die verschiedenen Netzklassen (unter der Voraussetzung, dass jedes Netz mindestens eine Transition enthält):



Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Beobachtung: Ein Petrinetz ist unbeschränkt genau dann, wenn sein Erreichbarkeitsgraph unendlich groß ist.

Gibt es in diesem Fall trotzdem noch eine graphische Darstellung, die "in gewisser Weise" alle erreichbaren Markierungen repräsentiert?

$\rightsquigarrow$ Überdeckbarkeitsgraph

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Zugrundeliegende Ideen:

- Das Verhalten von Petrinetzen ist "monoton", d.h., jede Schaltfolge ist auch dann noch möglich, wenn man zusätzliche Marken hinzufügt.
- Wenn im Erreichbarkeitsgraph zwei Markierungen m, m' existieren, so dass gilt:
  - m ist echt kleiner als m' (in Zeichen $m < m'$, d.h., $m \leq m'$ und $m \neq m'$) *und*
  - es gibt einen Pfad von m zu m',

  dann kann man die Transitionsfolge von m zu m' noch einmal schalten und erhält wiederum eine größere Markierung m''.

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Konstruktion des Überdeckbarkeitsgraphen

- Führe zunächst wie gewohnt die Konstruktion des Erreichbarkeitsgraphen aus.
- Sobald eine neue Markierung m' hinzugefügt wird, wobei es eine Vorgängermarkierung m mit $m < m'$ gibt ...

  $$\longrightarrow \boxed{m_0} \dashrightarrow \boxed{m} \dashrightarrow \boxed{m'}$$

  ... ersetze m' durch eine (ω-)Markierung $\hat{m}$ mit folgenden Eigenschaften:

  - $\hat{m}(s) = m'(s)$, falls $m(s) = m'(s)$, *und*
  - $\hat{m}(s) = \omega$, falls $m(s) < m'(s)$, wobei $s \in S$.
- Mache dann mit der Konstruktion weiter, solange bis keine Markierungen mehr hinzugefügt werden können.

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Bemerkungen:

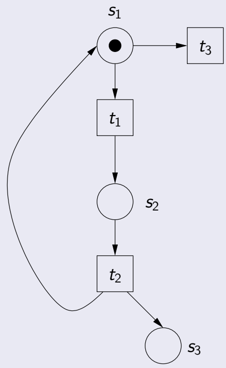
- Die neu erzeugten besonderen ω-Markierungen ordnen einer Stelle "unendlich" viele Marken (repräsentiert durch ω).

  Dies nimmt das wiederholte Schalten der Transitionsfolge von m zu m' vorweg, die in den ω-Stellen beliebig viele Marken produzieren kann.
- Für ω-Markierungen gilt beim Schalten von Transitionen: $\omega + k = \omega$ und $\omega - k = \omega$. Außerdem gilt ω als größer als jede natürliche Zahl.

Der englische Name für Überdeckbarkeitgraphen ist coverability graphs.

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Beispiel:



Reihenfolge der Stellen:

s_1, s_2, s_3

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & \\
(1,0,0) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, "t_1"] & (0,0,0) \\
(0,1,0) \arrow[d, "t_2"] & \\
(1,0,\omega) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, bend right, "t_1"'] & (0,0,\omega) \\
(0,1,\omega) \arrow[u, bend right, "t_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Eigenschaften des Überdeckbarkeitsgraphen (I)

- Die Konstruktion des Überdeckbarkeitsgraphen terminiert immer nach endlich vielen Schritten.
- ω-Markierungen treten genau dann auf, wenn das Netz unbeschränkt ist. (D.h., der Überdeckbarkeitsgraph kann auch dazu verwendet werden, um zu überprüfen, ob ein Netz unbeschränkt ist.)

Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Eigenschaften des Überdeckbarkeitsgraphen (II)

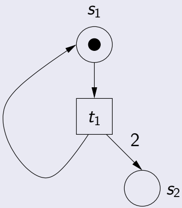
Sei N ein Netz und G der dazugehörige Überdeckbarkeitsgraph. Dann gilt:

- Für jede erreichbare Markierung m von N gibt es einen Knoten m' in G, mit $m \leq m'$.
- Für jeden Knoten m' in G und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine erreichbare Markierung m in N, so dass für alle Stellen s gilt:
  - $m(s) = m'(s)$, falls $m'(s) \neq \omega$
  - $m(s) \geq i$, falls $m'(s) = \omega$.

Frage: Ist für eine ω-Markierung m' in G vielleicht sogar jede Markierung m von N mit $m \leq m'$ erreichbar?

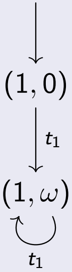
Petrinetze: Überdeckbarkeitsgraph

Nein! $\rightsquigarrow$ Gegenbeispiel:



Reihenfolge der Stellen:

s_1, s_2



Die Markierung $(1, 1)$ ist kleiner als $(1, \omega)$, ist aber in dem Netz nicht erreichbar.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Wichtige Begriffe bei Petrinetzen sind Nebenläufigkeit, Konflikt und Kausalität. Wir beschäftigen uns damit etwas genauer.

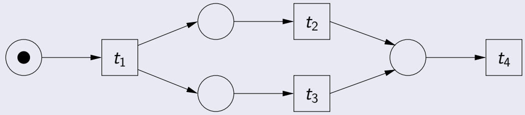
Kausalität

In einem Petrinetz N ist die Transition t_1 notwendige Bedingung für das Schalten von t_2 genau dann, wenn für alle Schaltfolgen $\tilde{t}$ gilt:

falls $m_0[\tilde{t}t_2\rangle m$ für eine Markierung m, dann enthält $\tilde{t}$ die Transition t_1.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiel für Kausalität:



- t_1 ist eine notwendige Bedingung für t_4,
- *aber* t_2 ist keine notwendige Bedingung für t_4. Denn nicht jede Schaltfolge, die zu t_4 führt, enthält t_2 (z.B. $\tilde{t} = t_1 t_3$). Das gleiche gilt für t_3.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Eigenschaften der Kausalität

Wenn t_1 eine notwendige Bedingung für t_2 ist, und t_2 eine notwendige Bedingung für t_3 ist, dann ist t_1 eine notwendige Bedingung für t_3. (Transitivität)

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Nebenläufigkeit

Eine Menge $T' = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T$ von Transitionen heißt nebenläufig aktiviert unter der Markierung m, wenn

$$^\bullet t_1 \oplus \cdots \oplus {}^\bullet t_n \leq m.$$

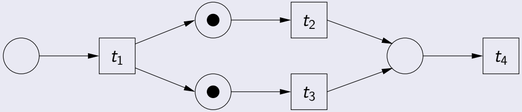
D.h., die Markierung m enthält genug Marken, um alle Transitionen "gleichzeitig" zu feuern.

Eigenschaften der Nebenläufigkeit

Wenn die Transitions-Menge T' unter der Markierung m nebenläufig ist, so ist auch jede Teilmenge von T' unter m nebenläufig.

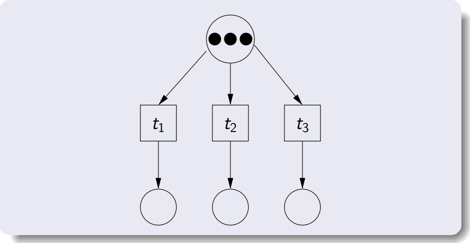
Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiele für Nebenläufigkeit:



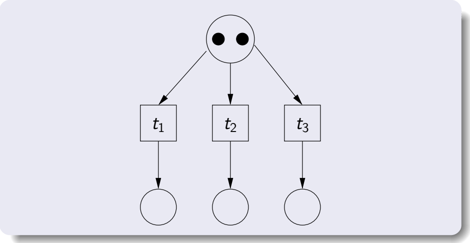
Die Menge $\{t_2, t_3\}$ ist nebenläufig unter der Anfangsmarkierung.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt



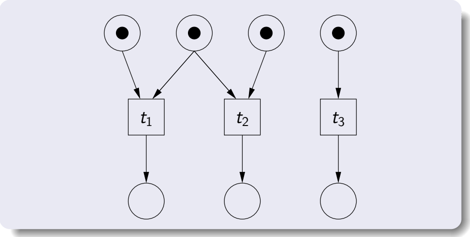
Die Menge $T' = \{t_1, t_2, t_3\}$ ist nebenläufig unter der Anfangsmarkierung.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt



Die Mengen $\{t_1, t_2\}$ $\{t_2, t_3\}$ und $\{t_1, t_3\}$ sind alle nebenläufig unter der Anfangsmarkierung. Dies gilt jedoch nicht für $\{t_1, t_2, t_3\}$.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt



Die Mengen $\{t_1, t_3\}$ und $\{t_2, t_3\}$ sind alle nebenläufig unter der Anfangsmarkierung. Dies gilt jedoch nicht für die Mengen $\{t_1, t_2\}$ und $\{t_1, t_2, t_3\}$.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass Nebenläufigkeit nicht transitiv ist: t_1 ist nebenläufig zu t_3, t_3 ist nebenläufig zu t_2, jedoch sind t_1 und t_2 *nicht* nebenläufig.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Nebenläufigkeit (Konsequenzen)

Wenn eine Menge T' von Transitionen nebenläufig ist, so ist jede beliebige Anordnung dieser Transitionen eine Schaltfolge ausgehend von m.

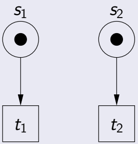
Das heißt, für jede Sequenz $\tilde{t}$, in der jede Transitionen aus T' genau einmal vorkommt, gibt es eine Markierung m' mit $m[\tilde{t}\rangle m'$.

Die Markierung m' ist durch T' eindeutig bestimmt.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Nebenläufige Transitionen führen daher in Erreichbarkeitsgraphen zu Strukturen, die die Form eines Quadrats (Diamond) oder (höherdimensionalen) Würfels haben.

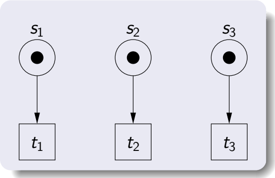
Beispiel für ein Quadrat:

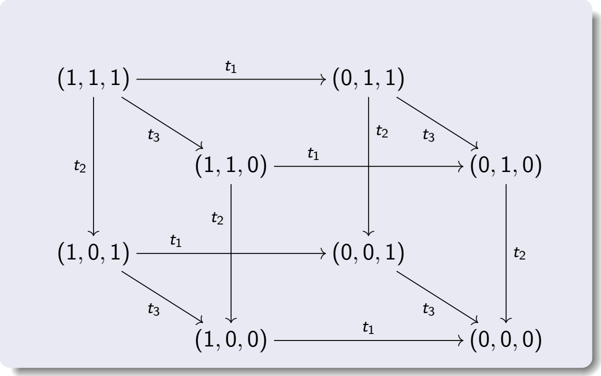


$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & (0,1) \arrow[d, "t_2"] \\
(1,0) \arrow[r, "t_1"] & (0,0)
\end{tikzcd}
$$

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiel für einen Würfel:

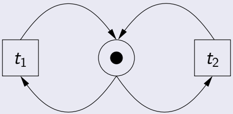




Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Frage: Wenn jede Anordnung von Transitionen in T' eine Schaltfolge darstellt, ist dann T' automatisch nebenläufig (unter einer Markierung m)?

Nein! $\rightsquigarrow$ Gegenbeispiel:

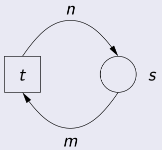


Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Schlinge

Ein Schlinge (oder Schleife) in einem Netz N besteht aus einer Transition t und einer Stelle s mit ${}^{\bullet}t(s) > 0$ und $t^{\bullet}(s) > 0$.

Graphisch:



Für schlingenfreie Netze gilt:

Sei N ein schlingenfreies Netz, sei m eine Markierung und T' eine Menge von Transitionen, so dass jede Anordnung der Transitionen in T' von m aus schaltbar ist. Dann ist T' nebenläufig.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Konflikt

Zwei Transitionen $t, t' \in T$ stehen unter der Markierung m in Konflikt genau dann wenn:

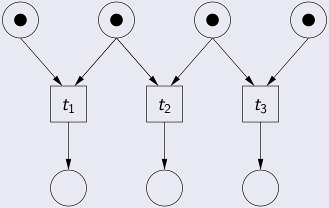
- t und t' sind beide unter m aktiviert *und*
- die Menge $\{t, t'\}$ ist unter m nicht nebenläufig.

Anschaulich: nur eine der beiden Transitionen kann schalten.

Das liegt *immer* daran, dass sie eine gemeinsame Stelle in den Vorbedingungen haben. D.h., es gibt eine Stelle s mit ${}^\bullet t(s) \geq 1$ und ${}^\bullet t'(s) \geq 1$.

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Beispiel für einen Konflikt:



Unter der Anfangsmarkierung steht t_1 in Konflikt mit t_2.
Außerdem steht t_2 in Konflikt mit t_3.

Jedoch steht t_1 *nicht* in Konflikt mit t_3 (keine Transitivität der Konfliktrelation).

Petrinetze: Kausalität, Nebenläufigkeit, Konflikt

Bemerkung: auf bestimmten Arten von azyklischen Netzen (sogenannte Occurrence-Netze) kann man Begriffe wie Kausalität, Nebenläufigkeit und Konflikt noch klarer herausarbeiten.

Zwei Transitionen sind in solchen Netzen immer entweder kausal abhängig, nebenläufig oder in Konflikt, unabhängig von der Markierung.

Petrinetze: Invarianten

Kurze Einführung in Matrizen und Vektorrechnung:

Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Eine $m \times n$-Matrix C (über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$) besteht aus $m \cdot n$ Einträgen

$$C_{i,j} \in \mathbb{Z} \qquad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

Sie wird folgendermaßen dargestellt:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

Bemerkungen:

Eine $m \times n$-Matrix besteht also aus m Zeilen der Länge n, oder – anders ausgedrückt – aus n Spalten der Länge m.

Dabei heißt m Zeilendimension und n Spaltendimension der Matrix.

Eine Matrix, für die $m = n$ gilt, heißt quadratisch. Die Matrizen, die wir im Folgenden betrachten werden, sind nicht notwendigerweise quadratisch.

Petrinetze: Invarianten

Spaltenvektor

Ein Spaltenvektor (oder Vektor) $\vec{u}$ der Dimension n ist eine $n \times 1$-Matrix, d.h., er hat folgendes Aussehen.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Wir betrachten im Folgenden immer Spaltenvektoren mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$.

Petrinetze: Invarianten

Bemerkungen:

- Gegeben sei eine Markierung $m = (m(s_1), \ldots, m(s_n))$. Dann entspricht dieser Markierung der Spaltenvektor

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m(s_1) \\ \vdots \\ m(s_n) \end{pmatrix}$$

- Spaltenvektoren kann man – wie Markierungen – addieren. Dabei werden die Komponenten paarweise addiert:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

Matrizen können miteinander multipliziert werden. Wir betrachten zunächst die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor.

Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor

Sei C eine $m \times n$-Matrix und $\vec{u}$ ein Spaltenvektor der Dimension n. Dann ist $C \cdot \vec{u}$ folgender Spaltenvektor:

$$C \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \cdot u_1 + \dots + C_{1,n} \cdot u_n \\ \dots \\ C_{m,1} \cdot u_1 + \dots + C_{m,n} \cdot u_n \end{pmatrix}$$

Das heißt, in der i-ten Zeile des Spaltenvektors steht der Eintrag $\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot u_j$.

Petrinetze: Invarianten

Zeilenvektor

Ein Zeilenvektor u der Dimension n ist eine $1 \times n$-Matrix, d.h., er hat folgendes Aussehen.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

Wir betrachten im Folgenden immer Zeilenvektoren mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$.

Petrinetze: Invarianten

Zeilenvektoren und Tupel:
Im folgenden werden wir Zeilenvektoren im wesentlichen mit n-Tupeln gleichsetzen. Eine Markierung $m = (m(s_1), \ldots, m(s_n))$, d.h., ein Tupel aus $\mathbb{N}_0^n$ schreiben wir auch als folgenden Zeilenvektor:

$$m = \begin{pmatrix} m(s_1) & \ldots & m(s_n) \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

Multiplikation einer Matrix mit einem Zeilenvektor

Sei C eine $m \times n$-Matrix und u ein Zeilenvektor der Dimension m. Dann ist $u \cdot C$ folgender Zeilenvektor der Dimension n:

$$u \cdot C = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \cdot C_{1,1} + \dots + u_m \cdot C_{m,1} & \dots & u_1 \cdot C_{1,n} + \dots + u_m \cdot C_{m,n} \end{pmatrix}$$

Das heißt, in der j-ten Spalte des Zeilenvektors steht der Eintrag $\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot C_{i,j}$.

Petrinetze: Invarianten

Merkregel:

- Die Multiplikation einer $m \times n$-Matrix mit einer $n \times 1$-Matrix (Spaltenvektor der Dimension n) ergibt eine $m \times 1$-Matrix (Spaltenvektor der Dimension m).
- Die Multiplikation einer einer $1 \times m$-Matrix (Zeilenvektor der Dimension m) mit einer $m \times n$-Matrix ergibt eine $1 \times n$-Matrix (Zeilenvektor der Dimension n).

Petrinetze: Invarianten

Wir betrachten nun die Inzidenzmatrix (oder einfach Matrix) eines Petrinetzes.

Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ die Stellenmenge, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ die Transitionsmenge des Petrinetzes N.
Die Inzidenzmatrix C von N ist eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen der Form:

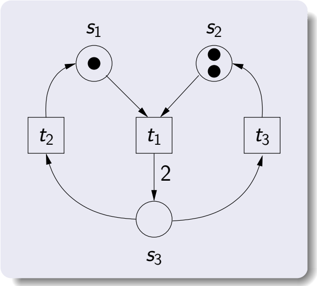
$$C_{i,j} = t_j{}^\bullet(s_i) - {}^\bullet t_j(s_i) \in \mathbb{Z}$$

Dabei handelt es sich um die herkömmliche Subtraktion (nicht die modifizierte) und das Ergebnis liegt in den ganzen Zahlen.

Der Eintrag $C_{i,j}$ gibt an, wie sich die Anzahl der Marken in Stelle s_i ändert, wenn die Transition t_j geschaltet wird.

Petrinetze: Invarianten

Beispiel für eine Matrix:



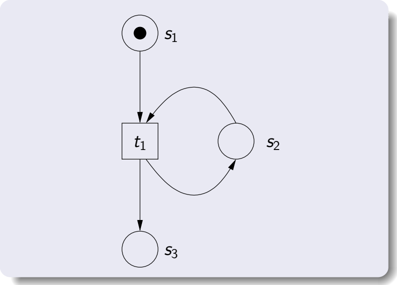
Berechnung der Matrix-Einträge:

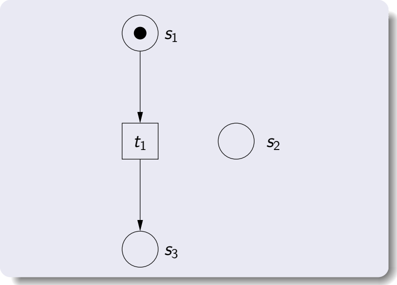
	t_1	t_2	t_3
s_1	$C_{1,1} = 0 - 1$	$C_{1,2} = 1 - 0$	$C_{1,3} = 0 - 0$
s_2	$C_{2,1} = 0 - 1$	$C_{2,2} = 0 - 0$	$C_{2,3} = 1 - 0$
s_3	$C_{3,1} = 2 - 0$	$C_{3,2} = 0 - 1$	$C_{3,3} = 0 - 1$

Resultierende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten





Die beiden Netze sind verschieden, haben aber dieselbe Inzidenzmatrix:

$$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses Phänomen kann nicht auftreten, wenn wir nur schlingenfreie Netze betrachten.

Petrinetze: Invarianten

Angenommen, es gibt eine Schaltfolge, bei der die Transition t_j u_j-mal geschaltet wird ($u_j \in \mathbb{N}_0$). Wie kann man die dadurch verursachte Änderung der Markierung mit Hilfe der Inzidenzmatrix bestimmen?

- Man multipliziert die Spalte j, die für die Transition t_j steht, mit u_j.
  Damit erhält man den Effekt des u_j-maligen Schaltens von t_j für jede einzelne Stelle.
- Man addiert alle Werte der Zeile i, die für die Stelle s_i steht, auf.
  Damit erhält man den Effekt des Schaltens aller Transitionen für eine einzelne Stelle.

$\rightsquigarrow$ Multiplikation der Matrix mit einem Vektor!

Petrinetze: Invarianten

Sei

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

der sogeannte Schaltvektor, der angibt, wie oft jede Transition geschalten werden soll.

Schaltvektor für das Beispielnetz: t_1 und t_2 werden zweimal geschaltet, t_3 einmal (dieser Schaltvektor ist von der Anfangsmarkierung aus realisierbar, z.B. durch die Schaltfolge $t_1 t_2 t_3 t_1 t_2$).

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

D.h., die Schaltfolge hat den Effekt, die Anzahl der Marken in Stelle s_1 gleichzulassen, in s_2 um eins zu verringern und in s_3 um eins zu erhöhen.

Wenn wir diese Änderung zu dem Spaltenvektor addieren, der der Anfangsmarkierung entspricht, ergibt sich:

$$\vec{m}_0 + C \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

Markierungsgleichung

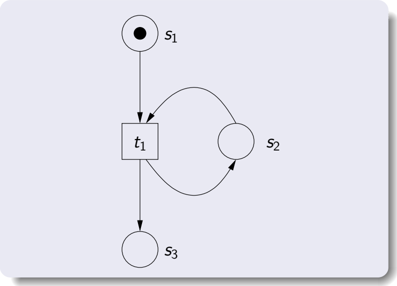
Für jede erreichbare Markierung m gibt es einen Schaltvektor $\vec{u}$ mit

$$\vec{m} = \vec{m_0} + C \cdot \vec{u}$$

Das heißt, jede erreichbare Markierung kann in obiger Form dargestellt werden.

Aber: nicht jede Markierung, die so dargestellt werden kann, ist auch erreichbar.

Petrinetze: Invarianten

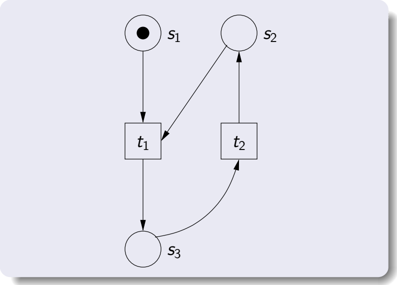


$$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Markierung ist jedoch nicht erreichbar, da t_1 nicht aktiviert ist.

Petrinetze: Invarianten



$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

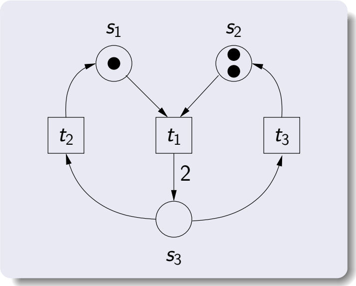
Diese Markierung ist jedoch nicht erreichbar, da die Schaltfolgen $t_1 t_2$ und $t_2 t_1$ beide nicht möglich sind.

Petrinetze: Invarianten

Die Markierungsgleichung kann also nicht dazu genutzt werden, um zu zeigen, dass eine bestimmte Markierung erreichbar ist.

Aber: man kann damit manchmal zeigen, dass eine Markierung nicht erreichbar ist.

Beispiel: Ist in folgendem Netz die Markierung $m = (2, 2, 0)$ erreichbar?



Wir überprüfen, ob die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

eine Lösung in den natürlichen Zahlen hat.

Petrinetze: Invarianten

$\rightsquigarrow$ Lösen eines Gleichungssystems

Hier sieht man leicht durch Addition aller Gleichungen, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$\begin{array}{ccccccl}
2 & = & 1 & -u_1 & +u_2 & & \\
2 & = & 2 & -u_1 & & +u_3 & \\
0 & = & & 2u_1 & -u_2 & -u_3 & \\
\hline
4 & = & 3 & & & & \text{Widerspruch!}
\end{array}$$

Das heißt, die Markierung $m = (2, 2, 0)$ ist nicht erreichbar.

Petrinetze: Invarianten

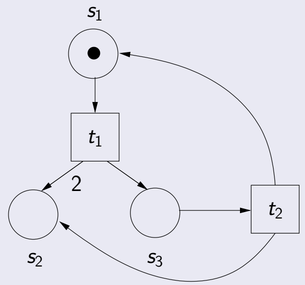
Achtung: Als Lösungen des Gleichungssystem interessieren uns hier Lösungen in den in den natürlichen Zahlen.

Daher ist das zum Lösen von Gleichungssystemen üblicherweise verwendete Gaußsche Eliminationsverfahren nur begrenzt einsetzbar. In manchen Fällen muss es noch durch andere Techniken (z.B. Lösungsverfahren für diophantische Gleichungen) erweitert werden.

In unserem Fall werden wir die Beispiele jedoch immer so wählen, dass die entstehenden Gleichungssysteme einfach zu lösen sind.

Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Stelle die Markierungsgleichung für folgendes (unbeschränkte) Netz auf.



- Kann man mit Hilfe der Markierungsgleichung überprüfen, dass die Markierung $(1, 20, 0)$ nicht erreichbar ist?
- Kann das gleiche Ergebnis auch mit dem Überdeckbarkeitsgraph erzielt werden?

Petrinetze: Invarianten

Wir kommen nun zu einer weiteren Verwendung von Inzidenzmatrizen: sogenannte T- und S-Invarianten.

T-Invariante

Gegeben sei ein Netz N und seine $m \times n$-Inzidenzmatrix C. Ein Spaltenvektor $\vec{u}$ der Dimension n heißt T-Invariante, falls

$$C \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Dabei ist $\vec{0}$ ein Spaltenvektor, der nur Einträge der Form 0 hat.

Bedeutung: eine T-Invariante beschreibt mögliche Schaltfolgen, die eine Markierung unverändert lassen. Im Erreichbarkeitsgraph ergibt sich dann ein Kreis.

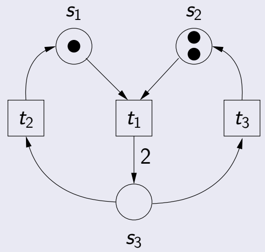
Petrinetze: Invarianten

Bemerkung zu T-Invarianten:

- Wie bei der Markierungsgleichung müssen solche Schaltfolgen nicht notwendigerweise realisierbar sein.
- Wenn es einen Kreis im Erreichbarkeitsgraphen gibt, so entspricht dieser aber auf jeden Fall einer T-Invariante.
- Wie bei der Markierungsgleichung interessieren uns hier nur T-Invarianten mit Einträgen aus $\mathbb{N}_0$.

Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Bestimme die T-Invarianten des folgenden Netzes:



Welche Bedeutung haben die T-Invarianten für den Erreichbarkeitsgraph?

Erreichbarkeitsgraph

Petrinetze: Invarianten

S-Invariante

Gegeben sei ein Netz N und seine $m \times n$-Inzidenzmatrix C. Ein Zeilenvektor v der Dimension m heißt S-Invariante, falls

$$v \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Invarianten

Bedeutung: sei $\vec{m}$ eine erreichbare Markierung. Dann gilt nach der Markierungsgleichung, dass es einen Schaltvektor $\vec{u}$ gibt mit:

$$\vec{m} = \vec{m_0} + C \cdot \vec{u}$$

Wenn man die Gleichung auf beiden Seiten von links mit v multipliziert, so erhält man:

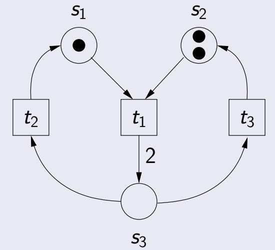
$$v \cdot \vec{m} = v \cdot \vec{m_0} + v \cdot C \cdot \vec{u} = v \cdot \vec{m_0} + 0 = v \cdot \vec{m_0}$$

Also gilt $v \cdot \vec{m} = v \cdot \vec{m_0}$ für jede S-Invariante v und für jede erreichbare Markierung m.

Eine Markierung, die diese Gleichung nicht erfüllt, kann daher nicht erreichbar sein!

Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Bestimme die S-Invarianten des folgenden Netzes:



Kann man mit Hilfe der S-Invarianten überprüfen, ob die Markierung $(2, 2, 0)$ erreichbar ist?

Petrinetze: Invarianten

Löse die Gleichung $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} -v_1 & -v_2 & +2v_3 & = & 0 \\ v_1 & & -v_3 & = & 0 \\ & v_2 & -v_3 & = & 0 \end{array}$$

Durch Vereinfachung erhalten wir $v_1 = v_2 = v_3$, d.h., die Lösungen sind genau die Zeilenvektoren, bei denen alle Einträge gleich sind. Sie sind also alle von der Form

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

All diese Vektoren ergeben äquivalente S-Invarianten, wir betrachten daher nur die S-Invariante $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Petrinetze: Invarianten

Für eine allgemeine Markierung $m = (m_1, m_2, m_3)$ des Beispielnetzes gilt also:

$$v \cdot \vec{m} = m_1 + m_2 + m_3 = 3 = v \cdot \vec{m}_0$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe der Marken in den drei Stellen konstant bzw. invariant ist und immer drei beträgt.

Im allgemeinen haben Invarianten die Form

$$v_1 \cdot m_1 + \cdots + v_m \cdot m_m = k,$$

wobei $v_1, \ldots, v_m, k \in \mathbb{Z}$ Konstanten sind.

Petrinetze: Invarianten

Für die spezielle Markierung $m = (2, 2, 0)$ ergibt sich:

$$2 + 2 + 0 = 4 \neq 3$$

D.h., diese Markierung ist in dem Netz auf jeden Fall nicht erreichbar (ausgehend von der Anfangsmarkierung).

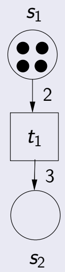
Petrinetze: Invarianten

Bemerkungen:

- Bei der Lösung des Gleichungssystems zur Berechnung von S-Invarianten sind prinzipiell auch Lösungen außerhalb der natürlichen Zahlen (negative Zahlen, Brüche, etc.) interessant.
- Da es sich jedoch um ein homogenes Gleichungssystem handelt (auf der rechten Seite steht der Nullvektor), kann man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner (kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner) zumindest immer eine Darstellung aller Lösungen als Vielfaches von ganzzahligen Vektoren erhalten.
- Es gibt im allgemeinen unendlich viele S-Invarianten: insbesondere sind alle Vielfache einer S-Invariante wieder S-Invariante. Diese Vielfachen liefern jedoch keine zusätzlichen Informationen über das Netz.

Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Bestimme die S-Invarianten des folgenden Netzes:



Kann man mit Hilfe der S-Invarianten überprüfen, ob die Markierung $(0, 5)$ erreichbar ist?

Petrinetze: Invarianten

Löse die Gleichung $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$-2v_1 \quad +3v_2 \quad = \quad 0$$

Durch Vereinfachung erhalten wir $v_1 = \frac{3}{2} \cdot v_2$.
D.h., die Lösungen sind von der Form $v = v_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$
Wenn man nur Lösungen in den ganzen Zahlen betrachten will, so multipliziert man mit dem Hauptnenner 2 und erhält:

$$v = \ell \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{für } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Im Folgenden betrachten wir nur die S-Invariante, die man erhält, wenn man $\ell = 1$ setzt.

Petrinetze: Invarianten

Für eine erreichbare Markierung $m = (m_1, m_2)$ des Beispielnetzes gilt also:

$$v \cdot \vec{m} = 3 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 = 12 = v \cdot \vec{m_0}$$

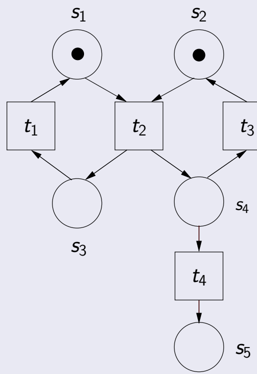
Für die spezielle Markierung $m = (0, 5)$ erhalten wir:

$$v \cdot \vec{m} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 \neq 12$$

und damit ist diese Markierung nicht erreichbar.

Petrinetze: Invarianten

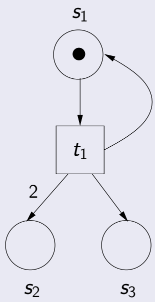
Aufgabe: Bestimme die S-Invarianten des folgenden Netzes:



Kann man mit Hilfe der S-Invarianten überprüfen, ob die Markierung $(0, 0, 1, 1, 1)$ erreichbar ist?

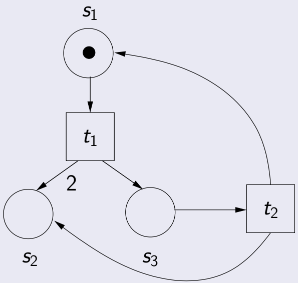
Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Mit Hilfe des folgenden Beispiels soll gezeigt werden, dass Invarianten auch für unbeschränkte Netze sehr nützlich sein können. Bestimmen Sie dazu die S-Invarianten des folgenden Netzes:



Petrinetze: Invarianten

Aufgabe: Wir hatten mit Hilfe der Markierungsgleichung gezeigt, dass die Markierung $(1, 20, 0)$ in folgendem Netz nicht erreichbar ist.



Kann man das gleiche Ergebnis auch mit Hilfe von S-Invarianten erzielen?

Petrinetze: Invarianten

Bemerkungen:

Für beschränkte Netze sind folgende Techniken zum Testen der Nicht-Erreichbarkeit geeignet. Sie werden der Reihe nach aufwändiger und exakter:

1. S-Invarianten
2. Markierungsgleichung
3. Erreichbarkeitsgraph
   (exakt, kann auch zur Überprüfung der Erreichbarkeit verwendet werden).

Petrinetze: Invarianten

Bemerkungen:

Auch für unbeschränkte Netze ist die Markierungsgleichung aufwändiger und exakter als S-Invarianten.

Der Überdeckbarkeitsgraph ist jedoch, im Gegensatz zum Erreichbarkeitsgraph, keine exakte Technik und erlaubt nur begrenzt Aussagen über die Erreichbarkeit von Markierungen.

Petrinetze: Invarianten

Für unbeschränkte Petrinetze haben wir also bisher nur approximative, unvollständige Methoden für das Erreichbarkeitsproblem. Es gilt jedoch:

Entscheidbarkeit des Erreichbarkeitsproblems

Es gibt ein Verfahren, das für ein gegebenes (unbeschränktes) Netz N und eine Markierung m entscheidet, ob m in N erreichbar ist. (Mayr, 1984)

Petrinetze: Invarianten

- Dieses Verfahren ist jedoch extrem aufwändig und in der Praxis derzeit nicht einsetzbar.
- Die obige Aussage bedeutet jedoch auch, dass Petrinetze *nicht* zu den mächtigsten Berechnungsmodellen gehören. Es gibt nämlich Berechnungsmodelle, für die das Erreichbarkeitsproblem nicht entscheidbar ist.

  Anders ausgedrückt: Petrinetze sind nicht Turing-mächtig ($\leadsto$ Vorlesung "Berechenbarkeit und Komplexität").

  Das liegt vor allem daran, dass Petrinetze keine Nulltests folgender Form erlauben: "Die Transition t kann nur feuern, wenn in der Stelle s *keine* Marken liegen."

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Wir betrachten nun noch einige größere Fallstudien ...

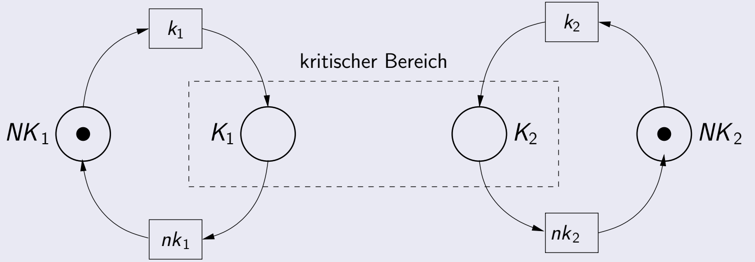
Zunächst behandeln wir das Konzept des wechselseitigen Ausschlusses (engl. mutual exclusion oder mutex).

- Wir betrachten zwei Akteure, die jeweils einen kritischen Bereich haben.
- Beide Akteure dürfen nicht gleichzeitig in ihren kritischen Bereich kommen, da sie sich dort gegenseitig behindern und unerwünschtes Verhalten auslösen würden (z.B. indem beide Akteure in dieselbe Datei schreiben).

  Es darf sich also immer höchstens ein Akteur im kritischen Bereich befinden.

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

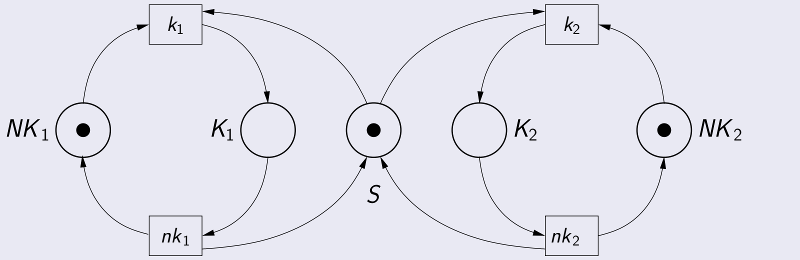
Ursprüngliches System:



Bedeutung der Stellen: K_1 (krit. Bereich Akteur 1), NK_1 (nicht-krit. Bereich Akteur 1), K_2 (krit. Bereich Akteur 2), NK_2 (nicht-krit. Bereich Akteur 2)

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Erweitertes System mit Mechanismen zum wechselseitigen Ausschluss:



Bedeutung der Stellen: K_1 (krit. Bereich Akteur 1), NK_1 (nicht-krit. Bereich Akteur 1), K_2 (krit. Bereich Akteur 2), NK_2 (nicht-krit. Bereich Akteur 2), S (Hilfsstelle, sog. Semaphor)

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Wir möchten zeigen, dass in den Stellen K_1, K_2 niemals gleichzeitig Marken liegen.

Reihenfolge der Stellen: K_1, NK_1, K_2, NK_2, S

Reihenfolge der Transitionen: k_1, nk_1, k_2, nk_2

Inzidenzmatrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Wir bestimmen die S-Invarianten, nach der Gleichung

$$v \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Entstehendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc}
v_1 & -v_2 & & & -v_5 & = & 0 \\
-v_1 & +v_2 & & & +v_5 & = & 0 \\
 & & v_3 & -v_4 & -v_5 & = & 0 \\
 & & -v_3 & +v_4 & +v_5 & = & 0
\end{array}$$

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Vereinfacht ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + v_5 \\ v_3 &= v_4 + v_5 \end{aligned}$$

Das heißt, die Lösungen haben genau die Form:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} v_2+v_5 & v_2 & v_4+v_5 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \\ = {} & v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + v_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $v_2, v_4, v_5 \in \mathbb{Z}$. Die drei Vektoren bilden eine Basis des Lösungsraums.

Petrinetze: Fallstudien (Wechselseitiger Ausschluss)

Für uns ist vor allem der letzte Vektor interessant. Für jede erreichbare Markierung $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ muss gelten:

$$m_1 + m_3 + m_5 = v \cdot \vec{m} = v \cdot \vec{m_0} = 1$$

Angenommen, in der Stelle K_1 liegt mindestens eine Marke ($m_1 \geq 1$) und in der Stelle K_2 liegt mindestens eine Marke ($m_3 \geq 1$).

Dann gilt:

$$2 \leq m_1 + m_3 + m_5 = 1,$$

was ein Widerspruch ist.

Also liegt in den Stellen K_1, K_2 zusammen immer höchstens eine Marke.

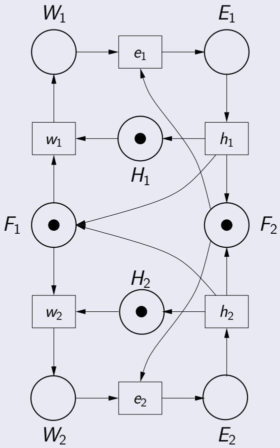
Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Wir kommen nochmal auf die speisenden Philosophen zurück:

- Diesmal sitzen nur *zwei* Philosophen an einem Tisch (damit das Beispiel nicht zu groß wird).
- Einer davon ist ein Linkshänder (und nimmt die linke Gabel zuerst), der andere ein Rechtshänder (und nimmt die rechte Gabel zuerst).

Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Petrinetz: links- und rechtshändige Philosophen



Reihenfolge der Stellen:
$F_1, F_2, H_1, H_2, W_1, W_2, E_1, E_2$

Reihenfolge der Transitionen:
$w_1, e_1, h_1, w_2, e_2, h_2$

Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Zu zeigen: in diesem Netz gibt es keine Verklemmung, bei der beide Philosophen im Wartezustand sind.
D.h., folgende Markierung soll nicht erreichbar sein:

$$m = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

Dazu betrachten wir die Inzidenzmatrix des Netzes:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Petrinetze: Fallstudien (Speisende Philosophen)

Eine S-Invariante ist

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

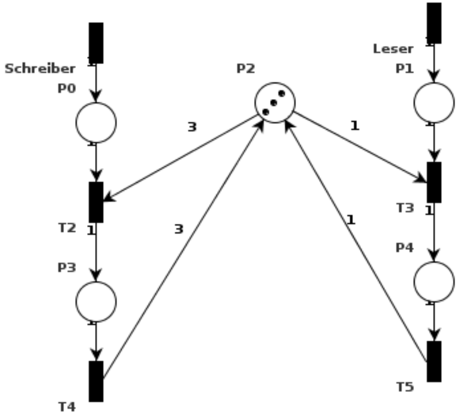
Und es gilt:

$$v \cdot \vec{m}_0 = 1 \qquad\qquad v \cdot \vec{m} = 2$$

Daraus folgt $v \cdot \vec{m}_0 \neq v \cdot \vec{m}$. Damit ist m nicht erreichbar und es kann daher kein Deadlock dieser Form geben.

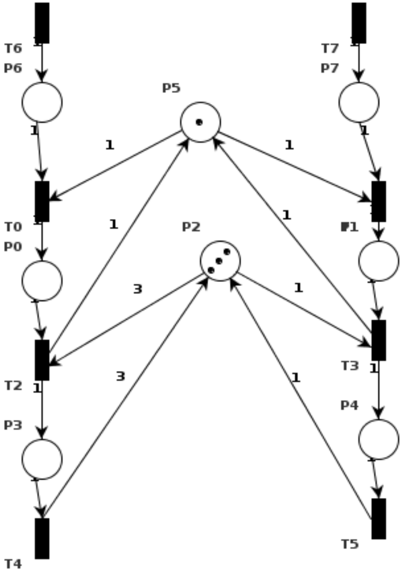
Fallstudie: Leser-Schreiber-Problem

- Beliebig viele Prozesse dürfen gleichzeitig lesen
- Wenn geschrieben wird, darf nur ein Schreiber und keine Leser im kritischen Abschnitt sein
- Die Schreiber 'verhungern', solange noch jemand lesen will



Fallstudie: Leser-Schreiber-Problem(2)

- Bessere Lösung: Sobald jemand schreiben will, müssen alle Leser warten



Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Wir betrachten zuletzt noch zwei weitere Arten von Netzen:

- Netze mit Kapazitäten
- Attributierte Netze
  auch bekannt unter den Namen: Netze mit individuellen Marken, Prädikat-Transitions-Netze, engl. coloured Petri nets

Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Netze mit Kapazitäten

Ein Petrinetz mit Kapazitäten besteht aus einem (herkömmlichen) Petrinetz N (mit Stellenmenge S) und einer Kapazitätsfunktion $k \colon S \to \mathbb{N}_0$. Für die Anfangsmarkierung m_0 muss gelten: $m_0 \leq k$.

Intuition: die Stelle s darf höchstens $k(s)$ Marken enthalten. Kapazitäten werden neben die Stellen geschrieben.

Schalten von Transitionen bei Kapazitäten

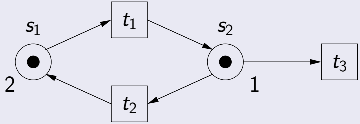
Eine Transition t kann unter einer Markierung m schalten, wenn gilt:

1. ${}^\bullet t \leq m$
2. *und* $m \ominus {}^\bullet t \oplus t^\bullet \leq k$.

D.h., eine Transition darf nur dann schalten, wenn dadurch die Kapazitäten nicht überschritten werden.

Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Beispielnetz mit Kapazitäten



Erreichbarkeitsgraph

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (1,1) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, bend left, "t_2"] & (1,0) \arrow[d, bend left, "t_1"] & \\
& (2,0) \arrow[u, bend left, "t_1"] & (0,1) \arrow[u, bend left, "t_2"] \arrow[r, "t_3"] & (0,0)
\end{tikzcd}
$$

Insbesondere: unter der Anfangsmarkierung $(1,1)$ ist die Transition t_1 nicht schaltbar.

Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Umwandlung eines Netzes mit Kapazitäten in ein Netz ohne Kapazitäten

1. Füge zu jeder Stelle s eine sogenannte Komplementstelle $\overline{s}$ hinzu. In der Anfangsmarkierung enthält $\overline{s}$ genau $k(s) - m_0(s)$ Marken.
   Idee: die Summe der Marken in der Stelle und der Komplementstelle ergibt immer die Kapazität.
2. Falls eine Transition in der Summe Marken aus einer Stelle herausnimmt ($n = t^\bullet(s) - {}^\bullet t(s) < 0$) füge eine Kante von t nach $\overline{s}$ mit Gewicht $-n$ ein.
3. Falls eine Transition in der Summe Marken in eine Stelle hineinlegt ($n = t^\bullet(s) - {}^\bullet t(s) > 0$) füge eine Kante von $\overline{s}$ nach t mit Gewicht n ein.

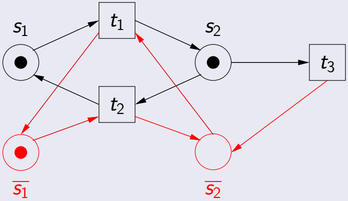
Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Mit dieser Konstruktion ist für jedes Paar $s, \overline{s}$ von Stellen sichergestellt, dass

- $m(s) + m(\overline{s}) = k(s)$ für jede erreichbare Markierung s;
- eine Transition t nur schaltbar ist, wenn die Kapazität der Stellen in der Nachbedingung noch nicht ausgeschöpft ist. Das wird dadurch überprüfen, dass die benötigte Kapazität über die Komplementstellen abgefragt wird.

Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Umgewandeltes Beispielnetz



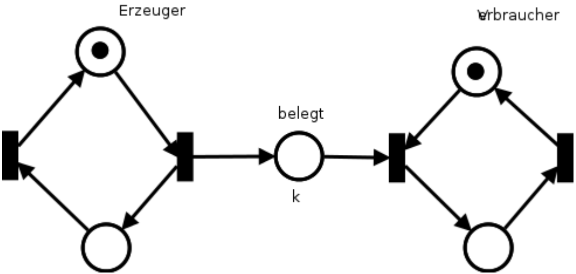
Reihenfolge der Stellen: $s_1, \overline{s_1}, s_2, \overline{s_2}$

Erreichbarkeitsgraph

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (1,1,1,0) \arrow[r, "t_3"] \arrow[d, bend left, "t_2"] & (1,1,0,1) \arrow[d, bend left, "t_1"] & \\
& (2,0,0,1) \arrow[u, bend left, "t_1"] & (0,2,1,0) \arrow[u, bend left, "t_2"] \arrow[r, "t_3"] & (0,2,0,1)
\end{tikzcd}
$$

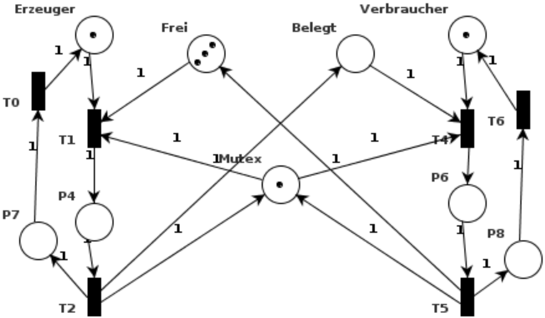
Fallstudie: Erzeuger-Verbraucher-Problem

- Ein Prozess erzeugt Objekte, der andere verbraucht diese
- Es steht nur eine begrenzte Anzahl Speicherplätze zur Verfügung



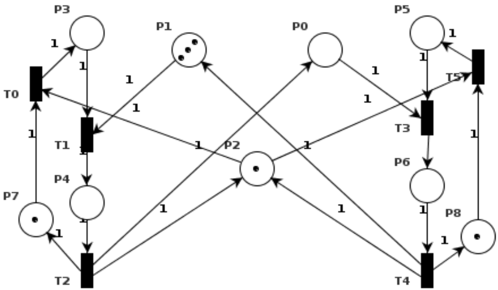
Fallstudie: Erzeuger-Verbraucher-Problem (2)

- Ein Prozess erzeugt Objekte, der andere verbraucht diese
- Es steht nur eine begrenzte Anzahl Speicherplätze zur Verfügung
- Das Schreiben/Lesen der Objekte muss im kritischen Abschnitt erfolgen



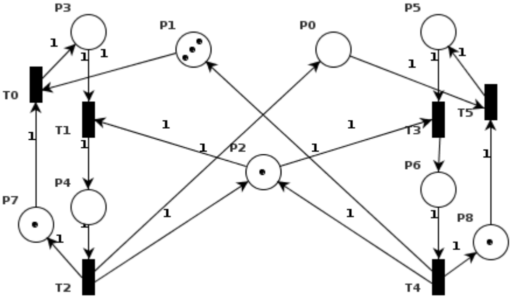
Fallstudie: Erzeuger-Verbraucher-Problem (3)

- Obige Lösung ignoriert, dass bei der Programmierung die Bedingungen (kritischer Abschnitt, freie Plätze/Objekte vorhanden) nacheinander überprüft werden müssen
- Variante 1: Erst kritischer Abschnitt
- Es kommt zum Deadlock, wenn die zweite Bedingung nicht erfüllt ist



Fallstudie: Erzeuger-Verbraucher-Problem (4)

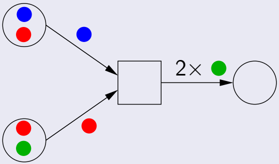
- Korrekte Lösung: Erst die Anzahl überprüfen, danach in den kritischen Abschnitt



Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Bei attributierten Netzen (oder coloured nets) haben die Marken Farben. Die Transitionen geben an, Marken welcher Farbe entnommen und erzeugt werden sollen.

Beispielsweise entnimmt folgende Transition eine blaue und eine rote Marke und erzeugt zwei grüne Marken.



Petrinetze: Weitere Arten von Netzen

Farben können dabei auch Elemente eines bestimmten Datentyps sein (z.B. Zahlen). Die Transitionen werden dabei symbolisch annotiert und an den Transitionen können auch Bedingungen stehen.

Beispielsweise hat folgendes Netz natürliche Zahlen als "Farben". Die Transition entnimmt der ersten Stelle eine natürliche Zahl x und der zweiten Stelle eine Zahl y. In die Stelle der Nachbedingung wird dann die Zahl $x + y$ gelegt. Die Transition darf nur schalten, wenn $x > 3$.